RAPPELS SUR LES VECTEURS

Table des matières

Objectifs

- Définir les notions de scalaire et de vecteur.
- Décrire les principales opérations réalisées sur les vecteurs, les coordonnées cartésiennes d'un vecteur et la notion de vecteur-position.
- Définir le produit scalaire et le produit vectoriel de deux vecteurs.

Définition et utilisation

1. Définition

Définition

Définition

Un vecteur est défini par **4 caractéristiques** :

1. Sa droite d'action,
2. Son point d'application,
3. Son sens indiqué par une flèche,
4. Sa longueur, définie par sa norme ou intensité.

Ce vecteur se note de la manière suivante : $\overrightarrow{AB}$ et se dit : « **vecteur AB** ».

[cf.]

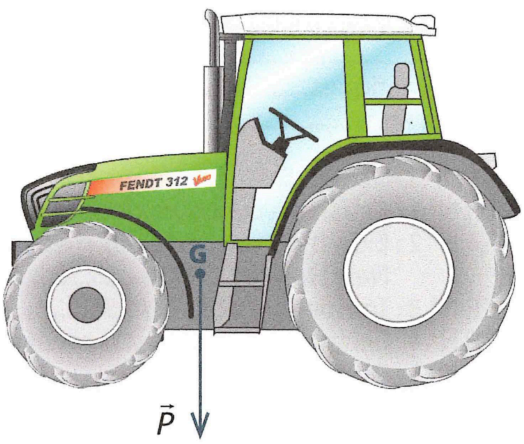
2. Utilisation

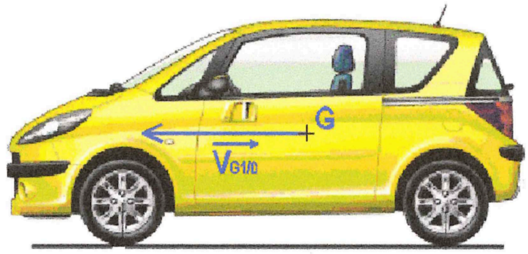
Utilisation en mécanique appliquée

En mécanique, on utilise les vecteurs dans différentes parties :

En statique, le vecteur en bleu sur le tracteur désigne l'action de la pesanteur sur le tracteur :

- Son point d'application est le centre de gravité G,
- Sa droite d'action est verticale,
- Son sens est vers le bas (attraction terrestre),
- Son intensité est égal au poids du tracteur.





En cinématique, le vecteur bleu désigne la vitesse de la voiture **1** par rapport à la route **0** :

- Son point d'application est le centre de gravité G,
- Sa droite d'action est horizontale, parallèle au sol,
- Son sens est celui du mouvement,
- Son intensité est égale à la vitesse de la voiture.

Opérations sur les vecteurs

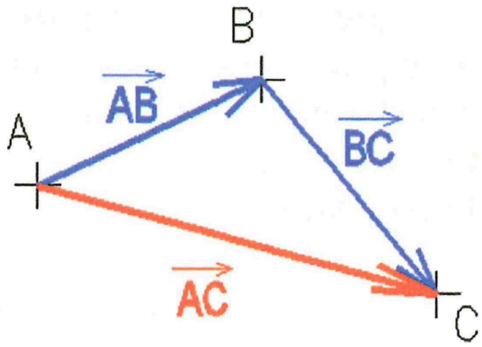
1. Addition

Relation de Chasles

Définition

On considère 3 points A, B et C. La relation de Chasles nous permet d'écrire l'égalité vectorielle suivante :

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$



Somme de vecteurs

Méthode

[cf.]

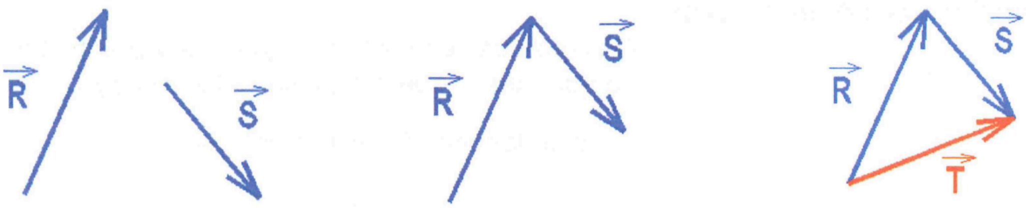


Figure 1 Figure 2 Figure 3

On considère 2 vecteurs $\overrightarrow{R}$ et $\overrightarrow{S}$ que l'on veut additionner. Ces deux vecteurs sont des vecteurs quelconques du plan (Figure 1).

Pour réaliser la somme de $\overrightarrow{R}$ et de $\overrightarrow{S}$, il faut les positionner bout à bout (Figure 2). On relie ensuite l'origine du vecteur $\overrightarrow{R}$ avec l'extrémité du vecteur $\overrightarrow{S}$, on obtient alors le vecteur $\overrightarrow{T}$ (Figure 3). On a la relation suivante :

$\overrightarrow{R} + \overrightarrow{S} = \overrightarrow{T}$

2. Soustraction

Définition

La différence entre les vecteurs $\overrightarrow{R}$ et $\overrightarrow{S}$ se ramène à une addition en ajoutant le vecteur opposé (- $\overrightarrow{S}$).

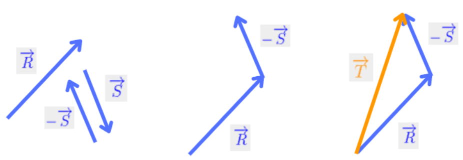


Figure 1 Figure 2 Figure 3

Fondamental

$$\vec{R} - \vec{S} = \vec{R} + (-\vec{S}) = \vec{T}$$

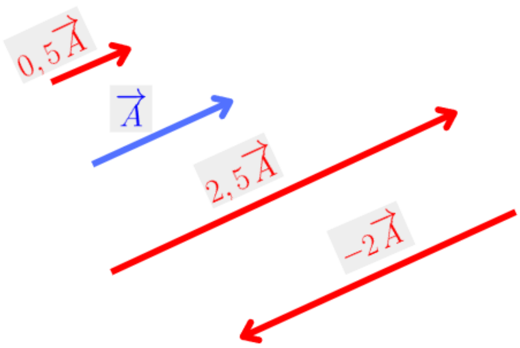
3. Multiplication d'un vecteur par un scalaire

Définition

Les sommes $(\vec{A} + \vec{A})$ et $(\vec{B} + \vec{B} + \vec{B})$ s'écrivent simplement sous la forme $2\vec{A}$ et $3\vec{B}$, produit des scalaires 2 et 3 par les vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$.

De la même façon, on peut écrire $-3\vec{F}$, $-\frac{1}{4}\vec{V}$ ...

Exemple



Si $\vec{A}$ a pour **intensité** 100 N, les intensités de $0,5\vec{A}$, de $2,5\vec{A}$ et de $-2\vec{A}$ seront respectivement de 50 N, 250 N et 200 N.

Coordonnées cartésiennes d'un vecteur

1. Repérage dans le plan

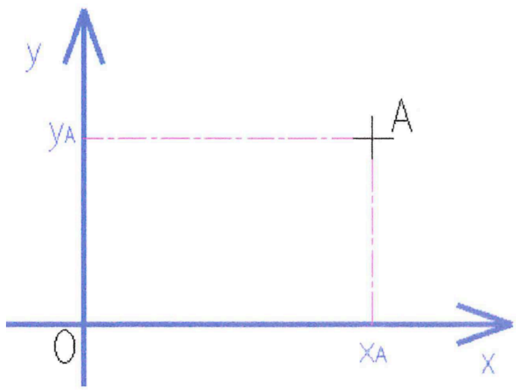
Coordonnées d'un point

Définition

On se place dans le repère (O,x,y). Les coordonnées du point A sont données par les projections de sa position sur les axes x et y :

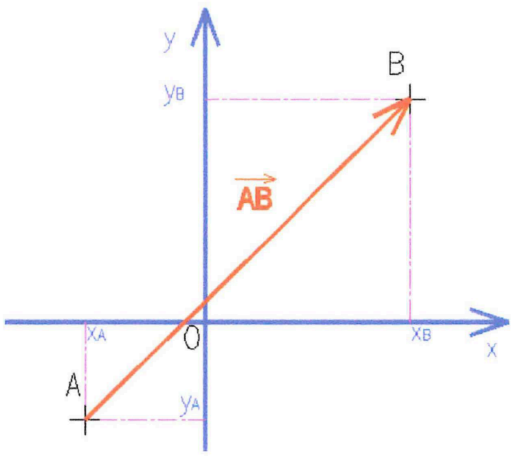
On écrit alors :

$A\binom{X_A}{Y_A}$ ou $A(X_A;Y_A)$



Coordonnées d'un vecteur

Définition



On considère le repère (O, x, y) et deux points A et B de coordonnées respectives $A\binom{X_A}{Y_A}$ et $B\binom{X_B}{Y_B}$.

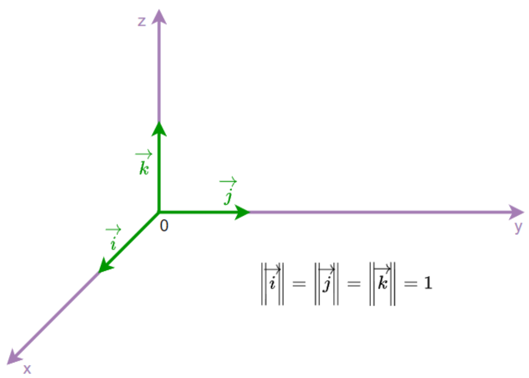
Les coordonnées du vecteur AB s'écrivent :

$\overrightarrow{AB}\binom{X_B-X_A}{Y_B-Y_A}$

On dit que l'on utilise les coordonnées de « l'extrémité » moins les coordonnées de « l'origine » du vecteur.

Autre façon

Définition



Vecteurs unitaires :

Les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont des **vecteurs unitaires d'intensité égale à 1.**

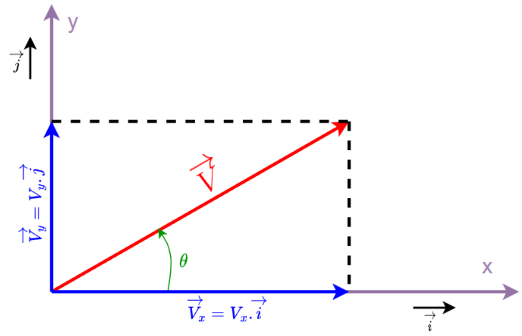
$\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont les vecteurs de base du repère orthonormé (O, x, y ,z)

Remarque : les vecteurs unitaires des axes x, y et z sont parfois notés $\vec{x}$, $\vec{y}$ et $\vec{z}$

Dans le plan, le vecteur $\overrightarrow{V}$ a deux coordonnées $\overrightarrow{V_x}$ et $\overrightarrow{V_y}$

$\overrightarrow{V} = \overrightarrow{V_x} + \overrightarrow{V_y}$

$\overrightarrow{V} = V_x.\ \overrightarrow{i} + V_y.\ \overrightarrow{j}$



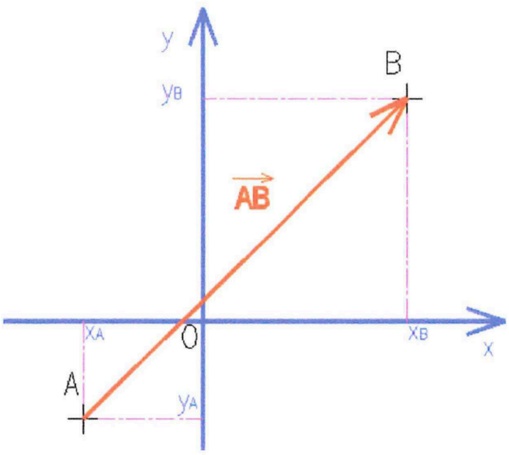
2. Calculs dans le plan

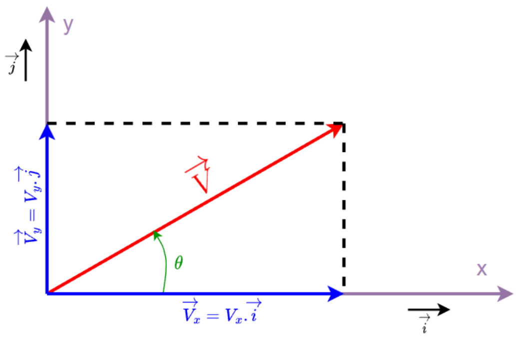
Calcul de la norme

Méthode

La norme d'un vecteur représente sa « longueur », elle s'écrit $||AB||$ pour le vecteur AB. Elle se calcule de la manière suivante :

$||AB||$ = $\sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2}$





Ici on a :

$\left\|\overrightarrow{V}\right\| = V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$

$V_x = V cos\theta$

$V_y = V sin\theta$

Direction : $tan\theta = \frac{V_y}{V_x}$

Exemple

Exemple

Déterminons le **module** et la **direction** du vecteur $\overrightarrow{F}$ ayant pour coordonnées cartésiennes 4 suivant x et 3 suivant y.

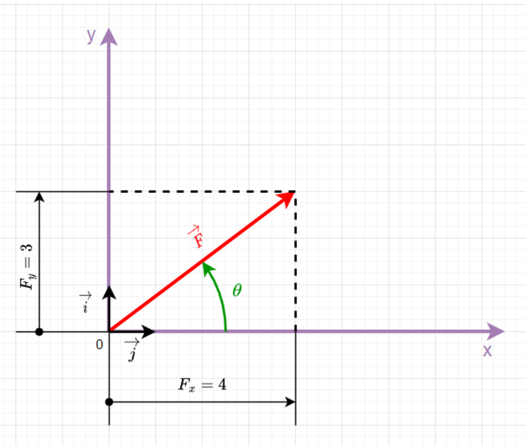
$\overrightarrow{F} = 4\,\overrightarrow{i} + 3\,\overrightarrow{j}$

$tan\theta = \frac{F_y}{F_x} = \frac{3}{4} = 0,75$

$\overrightarrow{F}$ a un angle θ = 36,87° par rapport à (O, x)

Intensité ou norme :

$\left\|\overrightarrow{F}\right\| = F = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$



Remarque :

$F_x = Fcos\theta = 5cos36,87 = 4$

$F_y = Fsin\theta = 5sin36,87 = 3$

Produit scalaire de deux vecteurs

IV

1. Définition

Définition

Le produit scalaire du vecteur $\overrightarrow{A}$ par le vecteur $\overrightarrow{B}$, noté $\overrightarrow{A}\,.\,\overrightarrow{B}$, est égal au produit des modules des deux vecteurs multiplié par le cosinus de l'angle(θ) entre leurs directions respectives.

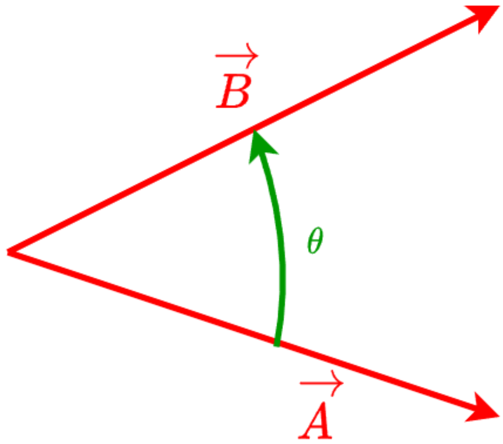
$$\overrightarrow{A}\,.\,\overrightarrow{B} = A.\,B.\,cos\theta = \left\|\overrightarrow{A}\right\|.\left\|\overrightarrow{B}\right\|.\,cos\theta = \overrightarrow{B}\,.\,\overrightarrow{A}$$

Si :

$$\overrightarrow{A} = A_x.\,\overrightarrow{i} + A_y.\,\overrightarrow{j} + A_z.\,\overrightarrow{k}$$

$$\overrightarrow{B} = B_x.\,\overrightarrow{i} + B_y.\,\overrightarrow{j} + B_z.\,\overrightarrow{k}$$

$$\overrightarrow{A}\,.\,\overrightarrow{B} = A_x.\,B_x + A_y.\,B_y + A_z.\,B_z$$



Remarque

Le produit des deux vecteurs est un nombre ou un scalaire et pas un autre vecteur.

Si $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$ sont perpendiculaires ($\theta = 90°$), alors $\overrightarrow{A}\,.\,\overrightarrow{B} = A.\,B.\,cos90° = 0$.

Le produit scalaire est commutatif : $\overrightarrow{A}\,.\,\overrightarrow{B} = \overrightarrow{B}\,.\,\overrightarrow{A}$.

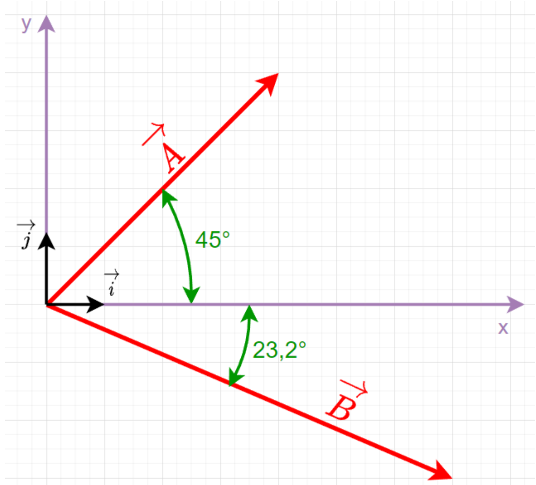
Exemple d'un produit scalaire

Exemple

$$\overrightarrow{A} = 4\,\overrightarrow{i} + 4\,\overrightarrow{j}$$

$$\overrightarrow{B} = 7\,\overrightarrow{i} - 3\,\overrightarrow{j}$$

$$\overrightarrow{A}\,.\,\overrightarrow{B} = (4 \times 7) - (4 \times 3) = 16$$



Remarque :

$A = \sqrt{4^2 + 4^2} = 5,66$

$B = \sqrt{7^2 + 3^2} = 7,62$

$\theta = 45^\circ + 23,2^\circ = 68,2^\circ$

$\overrightarrow{A}\,.\,\overrightarrow{B} = 5,66 \times 7,62 \times cos 68,2^\circ = 16$

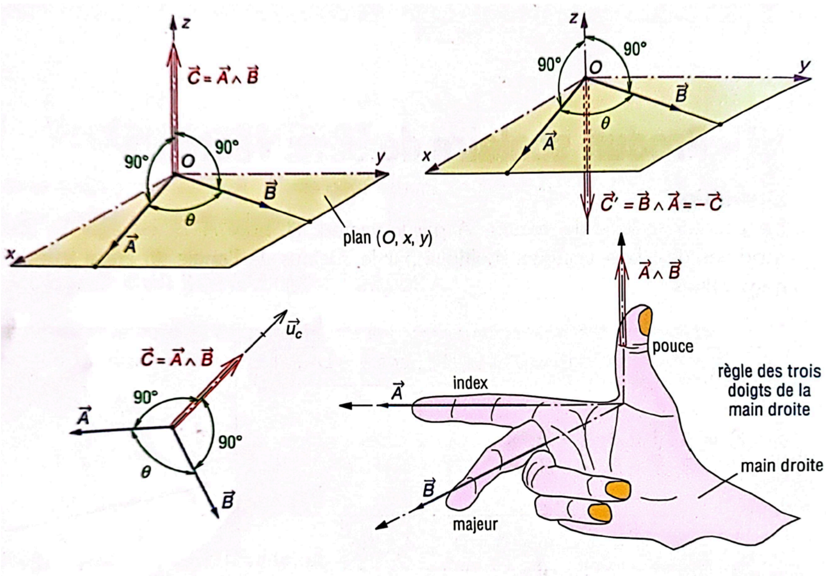
Produit vectoriel de deux vecteurs

1. Définition

Définition

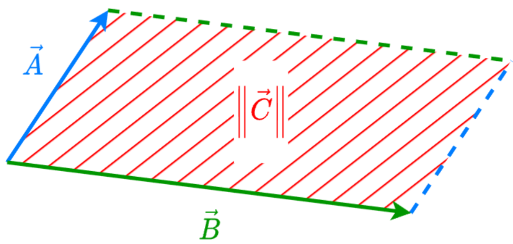
Le produit vectoriel du vecteur $\overrightarrow{A}$ par le vecteur $\overrightarrow{B}$, noté $\overrightarrow{A} \wedge \overrightarrow{B}$, est un vecteur $\overrightarrow{C}$ perpendiculaire au plan ($\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{B}$) et tel que :

$\overrightarrow{A} \wedge \overrightarrow{B} = \overrightarrow{C}$ avec $\left\|\overrightarrow{C}\right\| = A.Bsin\theta$



Remarque

La norme du vecteur $\vec{C}$ issu du produit vectoriel $\vec{A} \wedge \vec{B}$ est égale à l'aire du parallélogramme formé par ces deux vecteur.



Si $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$ sont parallèles, alors $\overrightarrow{A} \wedge \overrightarrow{B} = \overrightarrow{0}$

2. Calcul en coordonnées cartésiennes

Si $\overrightarrow{A} = A_x.\overrightarrow{i} + A_y.\overrightarrow{j} + A_z.\overrightarrow{k}$

et $\overrightarrow{B} = B_x.\overrightarrow{i} + B_y.\overrightarrow{j} + B_z.\overrightarrow{k}$

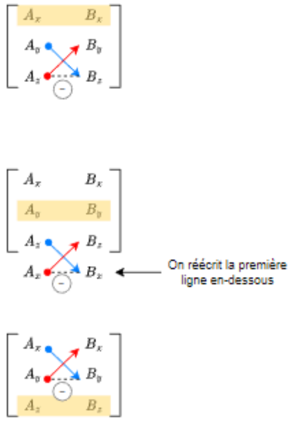
$\overrightarrow{A} \wedge \overrightarrow{B} = (A_y.B_z - A_z.B_y)\overrightarrow{i} + (A_z.B_x - A_x.B_z)\overrightarrow{j} + (A_x.B_y - A_y.B_x)\overrightarrow{k}$

Principe de détermination à partir des produits en croix

Méthode

$$\vec{A}\left\{\begin{matrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{matrix}\right. \qquad \vec{B}\left\{\begin{matrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{matrix}\right.$$

$$\vec{A}\wedge\vec{B}=\vec{C}\quad\left\{\begin{aligned} C_x &= A_y.B_z - A_z.B_y \\ C_y &= A_z.B_x - A_x.B_z \\ C_z &= A_x.B_y - A_y.B_x \end{aligned}\right.$$



Exemple

$$\vec{A}\left\{\begin{matrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{matrix}\right. \qquad \vec{B}\left\{\begin{matrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{matrix}\right. \qquad \begin{aligned} \vec{A} &= 4\vec{i}+2\vec{j} \\ \vec{B} &= 3\vec{i}+5\vec{j} \end{aligned}$$

$$\vec{C} = (2\times 0 - 0\times 5)\vec{i} + (0\times 3 - 4\times 0)\vec{j} + (4\times 5 - 2\times 3)\vec{k}$$

$$\vec{C} = 14\vec{k}$$